Diego Uribe

Torres y cuadrados mágicos

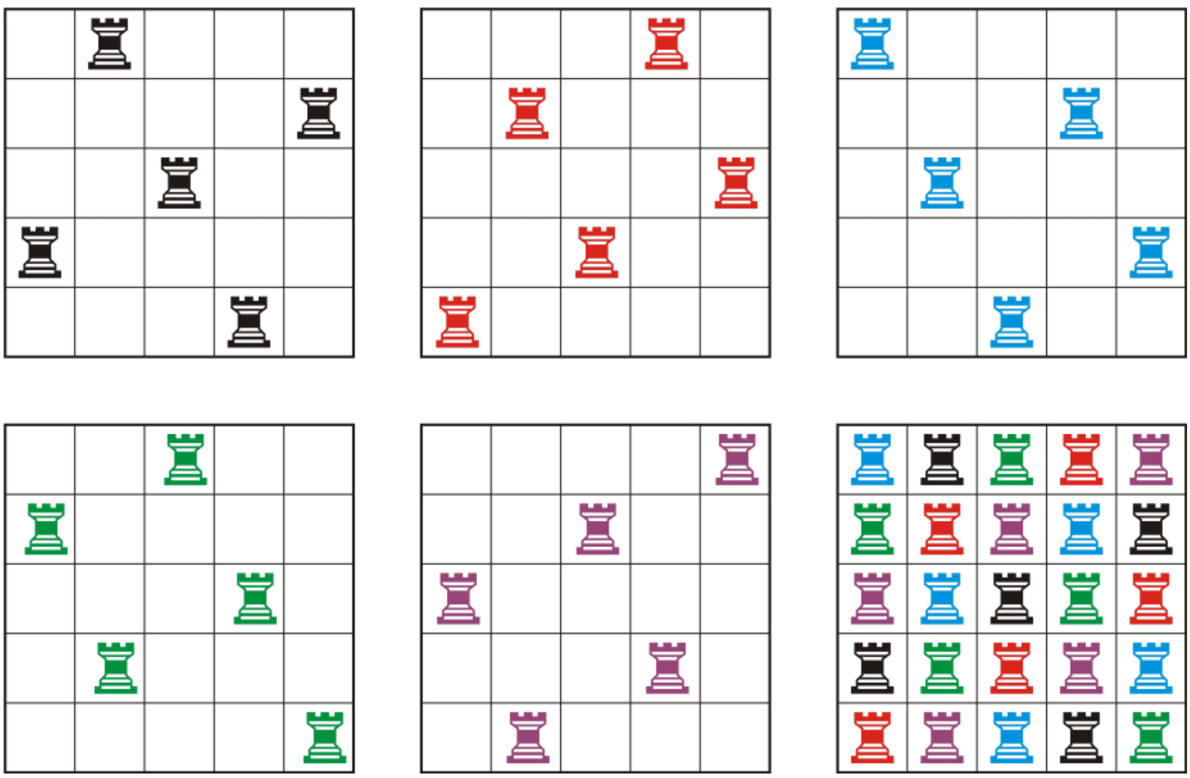
Hace un tiempo, este sitio publicó un acertijo propuesto en 1998 por Julio González Cabillón:

> *Las casillas de un tablero de ajedrez están enumeradas del 1 al 64 de esta manera: la fila 1, con los números del 1 al 8, de izquierda a derecha; la fila 2, con los números del 9 al 16, de izquierda a derecha, y así sucesivamente. Se ubican sobre el tablero ocho torres de modo que no se puedan capturar unas con otras. ¿Cuál es la suma de los números de las casillas en las cuales están situadas las torres?*

El problema puede generalizarse para cualquier tablero cuadrado de lado n y la respuesta es $n\ (n^2 + 1)\ /\ 2$. Como esta misma fórmula se usa para calcular la constante de un cuadrado mágico de lado n, la coincidencia sugiere alguna relación entre ambos acertijos. Notablemente, esta relación pasa por un tercer tipo de acertijo. Veamos.

El acertijo de González Castillón pide disponer las torres sobre el tablero de manera que no se ataquen entre sí. Tomemos un tablero de lado n (en nuestro ejemplo, 5) y busquemos n soluciones a este problema. Estas soluciones deben ser tales que, si se las ubica a todas simultáneamente sobre el tablero, no quede ninguna casilla libre.

En el último tablero, el de las soluciones superpuestas, reemplacemos cada color por un número (1 para el negro, 2 para el rojo, etc.). El resultado es el cuadrado latino que se muestra abajo. A partir de aquí ya pisamos terreno conocido (ver http://juegosdeingenio.org/archivo/792).



3	1	4	2	5
4	2	5	3	1
5	3	1	4	2
1	4	2	5	3
2	5	3	1	4

A continuación construyamos otro cuadrado latino que, combinado con el anterior, resulte en un cuadrado greco-latino.

1	4	2	5	3
5	3	1	4	2
4	2	5	3	1
3	1	4	2	5
2	5	3	1	4

El paso final es obtener un cuadrado mágico a partir de los dos cuadrados latinos. Para eso se toma el valor de una casilla en el primer (segundo) cuadrado, se le resta uno, se multiplica el resultado por n (en nuestro caso, 5) y se le suma el valor de la casilla correspondiente del segundo (primer) cuadrado. El resultado se coloca en la casilla equivalente del cuadrado mágico (la multiplicación por n asegura que se obtendrán todos los número entre 1 y n^2). Por ejemplo, consideremos la cuarta casilla de la segunda fila, que en primer cuadrado contiene un 3 y en segundo un 4. La operación es $5\,(3-1)+4=14$, valor que se coloca en la cuarta casilla de la segunda fila del cuadrado mágico ilustrado abajo. También se podría haber hecho $3+5\,(4-1)=18$, con lo que se hubiese obtenido un cuadrado mágico diferente.

11	4	17	10	23
20	8	21	14	2
24	12	5	18	6
3	16	9	22	15
7	25	13	1	19

Este método no garantiza cuadrados mágicos cuyas diagonales sumen la constante mágica, aunque sí lo harán las filas y columnas. Sin embargo, en ciertas soluciones como la del ejemplo de arriba, no sólo las diagonales mayores cumplen con esa condición, sino que también lo hacen las diagonales quebradas. A este tipo de cuadrados se los conoce como *panmágicos*.

Una aclaración final. Todo lo anterior sirve para demostrar la relación entre dos acertijos aparentemente independientes (aunque, curiosamente, no fue necesario hacer uso de la fórmula de la constante mágica). Si lo que se desea es construir cuadrados mágicos, existen métodos mucho más simples que pueden hallarse fácilmente en la web.

Deducción del valor sobre el que se sitúan las piezas de las soluciones al problema de las torres que no se atacan entre sí

Consideremos un tablero de lado n. Una solución al problema consiste en situar las torres sobre una de las diagonales. La suma de los valores de las casillas pertenecientes a la diagonal que va de la casilla 1 a la casilla n^2 es:

$$S = (1) + (2 + n) + (3 + 2n) + (4 + 3n) + \ldots\ldots (n + n^2 - n)$$

En donde los paréntesis agrupan los valores de cada casilla. El primer número indica la columna a la que pertenece la casilla y el segundo la cantidad de filas anteriores a dicha casilla. Reordenando términos y sacando factor común se tiene:

$$S = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots n) + n\ (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots n - 1)$$

Aquí se han disociado los valores de fila y columna, es decir, se ha generalizado la solución. Sin embargo, el primer paréntesis puede interpretarse como que se toma la primera casilla de la primera fila, la segunda casilla de la segunda fila, etc. Entonces, si se reordenan (permutan) estos números de todas las maneras posibles se obtiene el resto de las soluciones válidas. Por ejemplo, la secuencia $4 + 1 + 2 + 3 + \ldots\ n$ indica que se toma la cuarta casilla de la primera fila, la primera de la segunda fila, etc. Por lo tanto, la cantidad total de soluciones es igual a las permutaciones de n elementos, es decir, a factorial de n. Esta cantidad incluye las soluciones equivalentes por rotación y/o reflexión.

La ecuación anterior puede escribirse (siguiendo el viejo tema de Euler niño al que le ordenan sumar todos los números del 1 al 100) de la siguiente manera:

$$S = n\ (n + 1) / 2 + n\ (n\ (n + 1) / 2 - n)$$
$$= n\ (n + 1) / 2 + n\ ((n^2 + n) / 2 - n)$$

Ingresando la última n dentro del cociente:

$$= n\ (n + 1 + n^2 + n - 2n) / 2$$
$$= n\ (n^2 + 1) / 2$$

Que coincide con el valor de la constante de un cuadrado mágico de lado n.